Université du 20 août 1955 Skikda
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
$1^{ère}$ année MASTER (A.F.A, A.N.EDP, C.O.S.D) Dr N. BELLAL
Module : Analyse Fonctionnelle 1. Année: 2016/2017

Chapitre 0 : Préliminaire

Définition 1 (distance)

Soit E un ensemble non vide. Une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ définit une métrique (ou une distance) sur E si elle vérifie $\forall\, x, y, z \in E$:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \tag{0.1}$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad \text{(symétrie)} \tag{0.2}$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \text{(inégalité triangulaire)} \tag{0.3}$$

Définition 2 (espace métrique)

On appelle espace métrique tout couple (E, d) où d est une métrique (ou une distance) sur E.

Définition 3 (distances équivalentes)

Deux distances d_1, d_2 sur un même ensemble E, sont dites équivalentes s'il existe deux nombres $\alpha, \beta > 0$ vérifiant :

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y), \ \forall x, y \in E. \tag{0.4}$$

Définition 4 (sous-espace métrique)

Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E. On appelle sous-espace métrique A de E l'ensemble A muni de la distance d_A définie par

$d_A(x, y) = d(x, y)\ \forall x, y \in A$. d_A est appelé distance induite.

Définition 5 (espace produit)

Soient $(E_1, d_1), (E_2, d_2), \ldots, (E_n, d_n)$ espaces métriques. On définit sur l'espace produit $E = E_1 \times E_2 \ldots \times E_n$ les trois distances équivalentes suivantes :

$$\begin{cases} \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in E, \\ \delta(x, y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i),\ \delta'(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i)\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \delta''(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} \{d_i(x_i, y_i)/i = 1, \ldots, n\}. \end{cases} \tag{0.5}$$

On peut vérifier qu'elles constituent des distances sur E et elles sont équivalentes. Ces distances sont appelées distances usuelles.

Exemple 6

1) On définit sur $E = \mathbb{R},\ (E = \mathbb{C})$ L'application $(x, y) \to |x - y|$ est une distance sur E appelée distance usuelle.

2) Soit $E = \mathbb{R}^n$

$\forall x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\forall y = (y_1, \ldots, y_n)$

On pose

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,\ \delta'(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},\ \delta''(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

On peut vérifier que δ, δ' et δ'' sont des distances sur E.

3) L'espace des fonctions continues noté par $E = C([a, b], \mathbb{R})$ muni de la distance de la convergence uniforme d_∞ est un espace métrique:

$$d_\infty(f, g) = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$$

$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$ est aussi une distance sur E.

Définition 7 (diamètre, ensemble borné)

On appelle diamètre d'une partie A d'un espace métrique E la borne supérieure $\delta(A)$ des distances $d(x, y)$ où x et $y \in A$:

$$\delta(A) = \sup\{d(x, y)/x, y \in A\}. \tag{0.6}$$

On dit que A est borné lorsque son diamètre est fini.

Définition 8 (distance entre deux ensembles)

Soient A et B deux parties d'un espace métrique E muni de la distances d. On appelle distance de A et B la borne inférieure des distances $d(x, y)$ où $x \in A$ et $y \in B$:

$$d(A,B) = \inf\left\{d(x, y)/x \in A,\ y \in B\right\}. \tag{0.7}$$

Définition 9 (norme, semi-norme)

Soit E un espace vectoriel quelconque sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{k} = \mathbb{C}$).

On appelle semi-norme sur E une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie $\forall x, y \in E, \forall k \in \mathbb{k}$:

$$N\left(k.\ x\right) = |k|.\ N(x) \quad \text{(homogénéité)} \tag{0.8}$$

Où $|.|$ désigne la valeurs absolue si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou le module si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$;

$$N\,(x + y) \leq N(x) + N(y) \quad \text{(inégalité triangulaire).} \tag{0.9}$$

Si de plus N vérifie :

$$N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{(séparation),} \tag{0.10}$$

on dit que N est une norme sur E et on notera N par $\|.\|$.

Définition 10 (espace vectoriel normé)

Un espace vectoriel normé (ou en abrégé : e.v.n)est un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{k} = \mathbb{C}$) muni d'une norme.

Définition 11 (normes équivalentes)

Soit E un espace vectoriel normé muni de deux normes : $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$. On dit que ces deux normes sont équivalentes si :

$$\exists\, \alpha,\ \beta > 0,\ \alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1\ \forall x \in E. \tag{0.11}$$

Exemple 12 (espaces vectoriels normés)

1)

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_3 = \sup \left\{ |x_i|,\ i = \overline{1,\ n} \right\}.$$

$\|.\|_i$ définissent des normes sur $\mathbb{R}^n$ et elles sont équivalentes, $i = 1, 2, 3$.

2)

$$\|f\|_1 = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

$$\|f\|_2 = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

sont des normes sur $E = C\left(\left[a,\ b\right],\ \mathbb{R}\right)$.

3) $L^p(\Omega)$: espace des fonctions de puissance p- ième intégrables sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ pour la mesure de Lebesgue muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},\ 1 \leq p < +\infty$$

est un espace vectoriel normé.

4) $l^p = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} :\ \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p < +\infty \right\}$ est un espace normé vectoriel muni de la norme

$$\|x\| = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}};\ 1 \leq p < +\infty$$

Proposition 13 **(preuve exercice)**

Un espace vectoriel normé est un espace métrique pour la distance $\|x - y\| = d(x,\ y)$ pour tout x et y éléments de E.

Définition 14 **(espace préhilbertien)**

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{k} = \mathbb{C}$). Un produit scalaire sur E est une application $\varphi\ :\ E \times E \to \mathbb{k}$ telle que pour tout $x,\ x_1,\ x_2,\ y \in E$, et $\lambda \in \mathbb{k}$, on a:

$$\varphi(x,\ x) \geq 0 \text{ et } \varphi(x,\ x) = 0 \text{ si et seulement si } x = 0. \tag{0.12}$$

$$\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)} \tag{0.13}$$

$$\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y) \tag{0.14}$$

$$\varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x, y). \tag{0.15}$$

Nous utiliserons $\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle$ pour désigner un produit scalaire. Si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ $\overline{\varphi(y, x)} = \overline{\langle y, x \rangle} = \langle y, x \rangle$. Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.

Proposition 15 **(preuve exercice)**
Dans un espace préhilbertien E, l'application $\|.\| : E \to \mathbb{R}$, donnée par $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$, pour tout $x \in E$, est une norme pour E (c'est donc un espace vectoriel normé).

Exemple 16 **(espace préhilbertien)**

1) $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. La norme associée, appelée "norme euclidienne" est définie par

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

2) $\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n$ est un produit scalaire sur

$l^2 = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 < +\infty \right\}$ avec $x_n \in \mathbb{k} = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). La norme associée est

$$\|x\| = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

3) $\langle u, v \rangle_{L^2} = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx \ \ \forall u, v \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un produit scalaire sur $L^2(\Omega)$. La norme associée est :

$$\|u\|_{L^2} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

4) $\langle u, v\rangle_{H^1} = \langle u, v\rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L^2}, \forall u, v \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un produit scalaire sur l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$.

La norme associée est :

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Définition 17 (boule ouverte, fermée, sphère)

Soit (E,d) un espace métrique, a un point de $E, r > 0$. Les ensembles :

$$B(a, r) = \{x \in E/d(x, a) < r\}, \tag{0.16}$$

$$\bar{B}(a, r) = \{x \in E/d(x, a) \leq r\}, \tag{0.17}$$

$$S(a, r) = \{x \in E/d(x, a) = r\}. \tag{0.18}$$

sont appelées respectivement boule ouverte, boule fermée, sphère de centre a et de rayon r.

Proposition 18 (preuve TD)

Une partie A d'un espace métrique (E, d) est bornée si et seulement si elle est contenue dans une boule fermée.

Définition 19 (voisinage, ouvert, fermé)

Soit (E, d) un espace métrique.

1) On dit qu'un sous-ensemble A de E est ouvert s'il est vide ou pour tout $a \in A$ il existe une boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$ contenue dans A. On dit qu'une partie F de E est fermée si son complémentaire est ouvert : ($F^c = U$ ouvert)$\Leftrightarrow$ F fermé.

2) Soit $V \subset E$ et $x \in E$ on dit que V est un voisinage de x s'il existe une partie ouverte U de E telque x appartient à U et U inclus dans V.

Proposition 20 (preuve TD)

Dans un espace métrique quelconque, toute boule ouverte est un ensemble

ouvert, toute boule fermée est un ensemble fermé

Définition 21 (topologie induite par une distance)
Soient (E, d) un espace métrique et A une partie de E. Les assertions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{cases} A \text{ est réunion de boules ouvertes.} \\ \forall a \in A \ \exists r \in \mathbb{R}_+^* \ B(a, r) \subset A. \end{cases} \tag{0.19}$$

L'ensemble formé par les parties A de E vérifiant (0.19) est une topologie sur E, dite topologie induite par la distance d (ou associée à d). **On rappelle que** :

Définition 22 (espace topologique)
On appelle espace topologique tout couple constitué par un ensemble E et un ensemble T de parties de E appelées ensembles ouverts (ou en abrégé, ouverts) et satisfaisant aux trois propriétés suivantes :

1) Toute réunion (finie ou non) d'ouverts est ouverte.

2) Toute intersection finie d'ouverts est ouverte.

3) L'ensemble E et l'ensemble vide $\varnothing$ sont ouverts .

On dit encore que l'ensemble T de parties de X définit, sur X une topologie. L'ensemble E, muni de cette structure, est appelé espace topologique.

Remarque 23
Si $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont deux normes équivalentes alors les deux distances associées le sont aussi et par conséquent les topologies induites par ces deux distances sont également équivalentes (c'est-à-dire déterminent la même structure topologique sur E, ou encore la même famille d'ouverts sur E).

Définition 24 (interieur, adhérence, ensemble dense)
Soit A une partie de E.

1) Un point x de X est dit intérieur à A si et seulement si A est un voisinage de x. On appelle intérieur de A qu'on note $\text{int }(A) = \overset{0}{A}$, l'ensemble des points intérieurs à A. On appelle extérieur de A, int de A^c.

2) Soit A une partie de E et soit $x \in X$. On dit que x est adhérent à A si tout voisinage de x contient un point de A:

$$\forall V \text{ (voisinage de } x\text{)}, \ V \cap A \neq \varnothing. \tag{0.20}$$

On dit que x est un point d'accumulation de A si tout voisinage de x contient un point de A autre que x:

$$\forall V \text{ (voisinage de } x\text{)}, \ V \setminus \{x\} \cap A \neq \varnothing \Leftrightarrow (\exists y \in V \cap A / y \neq x) \tag{0.21}$$

On dit que x est un point isolé de A s'il appartient à A, mais n'en est pas un point d'accumulation, autrement dit s'il existe un voisinage de x qui ne contient aucun autre point de A que x.

Ainsi, dire que x est adhérent a A équivaut à dire que, ou bien x est un point d'accumulation de A, ou bien x est un point isolé de A. On appelle adhérence de A noté $\overline{A}$ l'ensemble des points de X qui sont adhérents a A. L'ensemble des points d'accumulation de A est noté par A'.

3) La frontière $Fr(A)$ d'un sous-ensemble A de E est l'ensemble des points x dont tout voisinage V contient au moins un point de $\overline{A}$ et un point de $\overline{A^c}$. On a donc $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

Sur cette formule on voit que la frontière de tout ensemble est fermée.

4) On appelle partie dense d'un espace métrique E toute partie A de E telle que $\overline{A} = E$ et on dit que A est non dense ou rare si $\overset{0}{\overline{A}} = \varnothing$.

Définition 25 (**espace séparable**)

Un espace métrique (E, d) est dit **séparable** s'il contient un sous-ensemble au plus d'énombrable dense dans E.

Définition 26 (**application continue**)

Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques.

1) On dit que $f : E \to F$ est continue en $x_0 \in E$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall x \in E, \ d(x, \ x_0) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(x_0)) < \varepsilon. \tag{0.22}$$

Autrement dit f est continue en x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \ \forall x \in B_d(x_0, \ \eta) \Rightarrow f(x) \in B_\delta(f(x_0), \ \varepsilon) \tag{0.23}$$

2) On dit que $f : E \to F$ continue sur E si elle est continue en tout point de E c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E, \exists \eta > 0, \forall y \in E, d(x, y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon. \quad (0.24)$$

Proposition 27 **(preuve TD)**
Soient (E, d), (F, δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application .
Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) f est continue .

2) Pour tout ouvert O de F, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E.

3) Pour tout fermé G de F, $f^{-1}(G)$ est un fermé de E.

Proposition 28 **(preuve TD)**
Soient (E, d), (F, δ) deux espaces métriques $f : E \to F$ une application.
L'application f est continue si et seulement si pour toute partie A de E, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Définition 29 **(continuité uniforme**, **application Lipschizienne)**
Soient (E, d) et (F, δ) Deux espaces métriques

1) on dit que $f : E \to F$ est continu uniformément sur E si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in E, d(x, y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad (0.25)$$

2) On dit que f est k – Lipschizienne avec $k \geq 0$ si

$$\forall x, y \in E, \delta(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y) \quad (0.26)$$

dans le cas où $k \in [0, 1[$ on dit que f est une application contractante (ou de contraction).

Proposition 30 **(exercice « étudier la réciproque »)**
Soient (E, d), (F, δ) deux espaces métriques $f : E \to F$ une application. On a f Lipschizienne $\Rightarrow f$ uniformément continue $\Rightarrow f$ continue.

Définition 31 **(homéomorphisme)**
1) On dit que f est un homéomorphisme si f est une (bijection continue) d'inverse continue.

2) On dit que f est un uniformément homéomorphisme si f est une bijection

uniformément
continue d'inverse uniformément continue.

Proposition 32 (preuve TD)

Un homéomorphisme de E sur F transforme un ouvert de E (respectivement un fermé de E) en un ouvert de F(respectivement un fermé de F).

Définition 33 (suite)

Soit (E, d) un espace métrique. Rappelons qu'une suite est un ensemble de points indexés par les éléments de $\mathbb{N}$ dans E.

Soit : $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que: $\varphi(k) = n_k$ une application croissante. L'ensemble des points

$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est encore un ensemble de points indexés par les éléments de $\mathbb{N}$ et est appelé suite extraite ou sous suite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 34 (limite d'une suite)

Soit (E, d) un espace métrique. une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des éléments de E converge

vers un élément $l \in E$ dans la métrique d, si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un nombre naturel $n_0(\varepsilon)$, tel que

$d(x_n, l) < \varepsilon$ pour tout les $n > n_0(\varepsilon)$,ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > n_0) \Rightarrow d(x_n, l) < \varepsilon. \qquad (0.27)$$

L'élément l est la limite de la suite. En d'autre terme, nous avons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$ si et seulement si la suite numérique $\{d(x_n, l), n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ converge vers 0.

Définition 35 (suite bornée)

Une suite d'éléments de l'espace métrique (E, d) est dite bornée si et seulement si l'ensemble de ses valeurs est une partie bornée de (E, d).

Proposition 36 (preuve exercice)

Soit $f : E \to F$ et $x \in E$. f est continue en x si et seulement si:

$$\left\{ \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E \text{ tel que: } \lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \right.$$

Proposition 37 (**preuve exercice**)

Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'élément de E qui converge vers l alors toutes suite extraite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l.

Définition 38 (**valeur d'adhérence d'une suite**)

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'espace métrique (E, d). Un élément $a \in E$ est dit valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement si:

$$\forall V \text{ (voisinage de } a) \quad \forall\ n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists\, n \geq n_0 \ : \ x_n \in V. \tag{0.28}$$

ou bien d'une manière équivalente

$\forall V$ (voisinage de a) $\{n \in \mathbb{N} \ : x_n \ \in V\}$ est un ensemble infini.

Proposition 39 (**preuve exercice**)

Soit A un sous ensemble de E; on a équivalence entre :

1) x est un point adhérent à A.
2) Il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers x.

Proposition 40 (**preuve exercice**)

Soit E un espace métrique et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de point de E. Les

assertions suiventes sont équivalentes:

(i) a est une valeure d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(ii) il existe une suite partielle (x_{n_k}) qui converge vers a.

Proposition 41 (**preuve exercice**)

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'élément de l'espace métrique (E, d). Posons $X_n = \{x_k \ : \ k \geq n\}$. L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{X_n}$. C'est donc un fermé de E.

Remarque 42 (**preuve devoir**)

1) Si $\lim x_n = l$, alors l est l'unique valeur d'adhérence de la suite.

2) Si a est valeur d'adhérence d'une sous-suite, alors a est valeur d'adhérence de la suite considérée.

3) Si $f : E \to F$ une application continue, a valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alors $f(a)$ est valeur d'adhérence de la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 43 (**preuve exercice**)

Soient (E, d) un espace métrique et F un sous ensemble de E. On a équivalence entre :

1) F est fermé.

2) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes d'éléments de F , on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ est élément de F.

Définition 44 (espace séparé)
On dit qu'un espace topologique $(X,\ T)$ est séparé ou de Hausdorff lorsque deux points distincts quelconques de X possèdent deux voisinages disjoints. En d'autre terme
$\forall x,\ y \in X,\ x \neq y\ \exists\ O_x \in T,\ \exists O_y\ \in T$ tel que: $O_x \cap O_y = \varnothing$.

Exemple 45
Tout espace métrique est un espace topologique séparé.

Remarque 46 (relation entre intérieur et adhérence)
Dans tout espace topologique X on a:

$$\begin{cases} \left(\overset{0}{A}\right)^c = \overline{A^c}. \\ (\overline{A})^c = \operatorname{int}\,(A^c)\,. \end{cases} \tag{0.29}$$

où A est un sous-ensemble de X.

Chapitre 1 : rappels sur les espaces métriques complets

Définition 1.1 (suite de Cauchy)
Soit E un espace métrique, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E. On dit que cette suite est une suite de Cauchy si $d(x_p,\ x_q)\ \to 0$ quand p et $q\ \to +\infty$,

autrement dit:

$$(\forall \varepsilon > 0)\left(\exists n_0,\ n_0 \in \mathbb{N}\right)\left(\forall p,\ q \geq n_0\right) \Rightarrow \left(d\left(x_p,\ x_q\right) \leq \varepsilon\right). \tag{1.1}$$

Proposition 1.2 (preuve devoir)

Soit (E,d) un espace métrique et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut vérifier que :

1) Si la limite d'une suite existe alors elle est unique.
2) Toute suite convergente est de Cauchy.
3) Toute suite de Cauchy est bornée.
4) Toute suite extraite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.
5) Toute suite de Cauchy qui possède une suite convergente converge.
6) Toute valeur d'adhérence d'une suite de Cauchy est limite de la suite.
7) Une suite de Cauchy a au plus une valeur d'adhérence.

Proposition 1.3 (preuve cours)

Soit (E,d), $\left(F,\delta\right)$ deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application uniformément continue . Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E, alors $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans F.

Définition 1.4 (espace complet)

On dit qu'un espace métrique E est un espace complet si toute suite de Cauchy de points de E est convergente dans E.

Proposition 1.5 (preuve TD)

Soient E un espace et d_1, d_2 deux métriques équivalentes sur E. Alors si $\left(E,\ d_1\right)$ est complet, il en est de même de $\left(E,\ d_2\right)$. De plus, toute suite de Cauchy convergente pour l'un est suite de Cauchy convergente pour l'autre.

Définition 1.6 (sous-espace complet)

Soit $(X,\ d)$ un espace métrique complet et soit A un sous ensemble de X, A est complet si $\left(A,\ d_A\right)$ et complet, d_A est la métrique induite.

Proposition 1.7 (preuve TD)

Tout produit fini d'espaces métriques $\left(E_i,\ d_i\right)$ où $i \in I$ (et où I est un ensemble fini) complets est complet pour la métrique produit (si $x = (x_i)_{i\in I}$ et $y = (y_i)_{i\in I}$, $d\left(x,\ y\right) = \sup_{i\in I} d_i\left(x_i,\ y_i\right)$, voir définition 5 chapitre 0).

Proposition1.8 (preuve cours)

1) Soit $\left(X,\ d\right)$ un espace métrique complet et soit F un sous ensemble de X. Si F est fermé alors F est complet.

2) Soit $\left(X,\ d\right)$ un espace métrique. F un sous ensemble de X. Si F est complet

alors F est fermé.

Exemple 1.9

1) $(\mathbb{R}, |.|)$ est un espace complet .

2) $(\mathbb{Q}, |\,.\,|)$ n'est pas complet .

3) $A = \left]0,\ 1\right[$ muni de la distance usuelle n'est pas complet.

Cas particulier d'espaces complets (étudier les exemples du chapitre 0)

On rappelle :

1) On appelle espace de **Banach** l'espace vectoriel normé complet pour la métrique associée à sa norme (voir aussi définition 10 page 3).

2) Un espace de **Hilbert** est un espace complet par rapport à la norme induite par un produit scalaire. (voir aussi définition 14 page 4).

Proposition 1.10 (preuve TD)

Soit (E, d) , (F, δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application uniformément continue . Si f est bijective et f^{-1} est continue. Si F est un espace Complet alors E l'est aussi.

Théorème 1.11 (du point fixe du Banach)

Si E est un espace métrique complet et si f est une application contractante de E dans E , alors f admet un point fixe unique, c'est-à-dire:

$\exists x \in E : f(x) = x.$

(voir cours pour la preuve du théorème 1.11 du point fixe du Banach)

Corollaire 1.12 (preuve cours)

Si (X, d) est complet et que $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n fois, $n \geq 2$) est contractante alors f possède un point fixe dans X. De plus, ce point fixe est unique.

Théorème 1.13 (Principe des fermés emboités)

Soient (E, d) un espace métrique complet et $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fermés non vides de E vérifiant:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+1} \subset F_n; \tag{1.2}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \delta(F_n) = 0 \tag{1.3}$$

Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est réduit à un point.

(voir cours pour la preuve du théorème 1.13 du principe des fermés emboités)

Remarque 1.14 (**preuve exercice**)

On peut vérifier que la réciproque du théorème 1.13 est aussi vraie en utilisant la propriété suivante des suites de Cauchy:

Si $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite dans un espace métrique E, et si on pose
$A_1 = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $A_2 = \{x_2, x_3, \ldots\}$, $A_3 = \{x_3, x_4, \ldots\}$, ...

Alors (x_n) est une suite de Cauchy si et seulement si les diamètres des A_n tendent vers zéro, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(A_n) = 0$.

Définition 1.15 (**espace de Baire**)

On apppelle espace de Baire un espace topologique séparé E ayant la propriété suivante:

$$\text{Si } O_0, O_1, \ldots, O_n, \ldots, \text{ sont une suite d'ouverts dense de } E, \text{ leur intersection } O = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \text{ est encore dense.} \tag{1.4}$$

En d'autre terme E est de Baire si pour toute famille de fermé d'intérieur vide alors la réunion de ces fermés est encore d'intérieur vide.

Théorème 1.16 (**de Baire**)

Un espace métrique complet E est de Baire.

(voir cours pour la preuve du théorème 1.16 (de Baire))

Corollaire 1.17 (**preuve TD**)

Si un espace métrique complet (E, d) s'écrit comme réunion dénombrable de fermés alors au moins un de ces fermés est d'intérieur non vide.

Plus formellement, soit (E, d) un espace métrique complet et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de fermés telle que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ alors $\exists n \in \mathbb{N}$, $\overset{0}{F_n} \neq \varnothing$.

Théorème 1.18 (**prolongement des applications uniformément continues**)

Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques, E_1 un sous-espace dense de E, f_1 une application de E_1 dans F; on suppose f_1 uniformément continue sur E_1 et F complet. Alors il existe une application f et une seule de E dans F, qui soit continue et qui prolonge f_1; en outre, cette application est uniformément continue.

Aide. Pour démontrer ce théorème on utilise la densité de E_1 la continuité uniforme de f_1 ainsi que, la complétude de F et aussi l'inégalité triangulaire de la distance δ.

La preuve de ce théorème se trouve par exemple dans ([3 page 132]) .

Chapitre 2 : rappels sur les espaces métriques compacts

Définition 2.1 (recouvrement)

Soit (E,d)un espace métrique, considerons $\{O_i\}_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E telle que $E \subset \bigcup_{i\in I} O_i$. Cette famille est appelée un recouvrement ouvert de E. En outre, si une sous-famille finie de $\{O_i\}_{i\in I}$ est également un recouvrement de E, c'est-à-dire $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_i$ alors on dit qu'on peut extraire de cette famille un sous-recouvrement fini ou que $\{O_i\}_{i\in I}$ contient un sous-recouvrement fini.

Définition 2.2 (espace compact)

On dit qu'un espace métrique $(E,\ d)$ est compact si et seulement si de tout recouvrement
ouvert de E on peut en extraire un sous recouvrement fini .

En d'autre tèrme :

E est compact $\Leftrightarrow$ $\forall (O_i)_{i\in I}$ recouvrement ouvert de E ,$\exists\ J \subset I\ (J$ fini $)$ tel que :

$$E = \bigcup_{i\in J} O_i \tag{2.1}$$

En d'autre terme E est compact si et seulement si de toute famille $\{F_i\}_{i\in I}$ de fermés de E, dont l'intersection est vide, on peut extraire une sous-famille finie dont l'intersection est vide. L'assertion (2.1) est appelée axiome de **Borel-Lebesgue**.

Proposition 2.3 (preuve TD)

Si E est un espace métriques compact, l'intersection d'une suite décoissante de fermés non vide est non vide: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$

Proposition 2.4 (preuve TD)

Si E est un espace métrique compact, alors toute suite de E possède une valeur d'adhérence.

On peut encore exprimer la proposition 2.4 sous la forme :

Proposition 2.5

Si $(E,\ d)$ est un espace métrique compact alors toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E pocède

une sous-suite convergente.

La réciproque de cette proposition fait l'objet du théorème suivant :

Théorème 2.6 (Bolzano-Weierstrass)

On a équivalence entre :

- (E,d) est un espace métrique compact
- de toute suite de E on peut extraire une sous-suite convergente dans E.

Définition 2.7 (sous-espace métrique compact)

Une partie A d'un espace métrique (E,d) est dite compacte si le sous-espace métrique $(A,\ d_A)$ est compact.

Proposition 2.8 (preuve cours)

Soit $(E,\ d)$ un espace métrique et $K\ \subset E$.

1) Tout compact K de E est fermé.
2) Tout fermé K dans un compact E est compact.
3) Tout compact K est borné.
4) Tout espace métrique compact E est complet.

Proposition 2.9 (preuve exercice)

- une réunion finie de sous espaces métriques compacts est compacte.
- Une intersection non vide quelconque de sous espaces métriques compacts est compacte.

Théorème 2.10 (de Tychonofe)

Tout produit, fini ou non , d'espaces compacts est compact. Inversement, si un produit d'espaces non vides est compact, chacun d'eux est compact .

Aide. La preuve de ce théorème nécessite des techniques qui n'ont pas été développées dans ce cours.
Une démonstration détaillée ce trouve par exemple dans [3] page 91. Néanmoins nous allons voir au TD une démonstration dans un cas particulier.

Théorème 2.11 (preuve cours)

Soit (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques et $f:\ E \to F$ une application continue.

Si E est compact alors $f(E)$ est compact dans $(F,\ \delta)$, de plus f est uniformément continue.

Corollaire 2.12 (preuve TD)

On considère $(\mathbb{R}, |\,|)$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue de E dans $\mathbb{R}$; et soit K un compact de E. Alors $f(K)$ est bornée dans $\mathbb{R}$ et f atteint ses bornes sur K.

Corollaire 2.13 (preuve TD)

Soit f une application injective continue d'un espace compact E dans un espace métrique F. Alors E et $f(E)$ sont homéomorphes.

Définition 2.14 (espace localement compact)

On appelle espace localement compact tout espace métrique E dont tout point possède au moins un voisinage compact.

Proposition 2.15 (preuve exercice)

Tout espace compact est localement compact.

Remarque 2.16 (voir exemple 2.19)

La réciproque de cette proposition n'est pas vraie.

Définition 2.17 (ensemble relativement compact)

Soit (E, d) un espace métrique est $A \subset E$. Alors A est un sous-ensemble relativement compact (ou précompact) si $\overline{A}$ est compact.

(voir le complément de cours de ce chapitre pour plus de précision sur cette définition)

Proposition 2.18 (propriétés)

Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. On a les propriétés suivantes (facile à démontrer à partir de la définition de l'adhérence):

1) Si A est relativement compact dans E, toute partie de A l'est aussi.
2) Toute partie d'un espace compact E est relativement compacte dans E.
3) Si A_1, A_2, ...A_n sont relativement compacts dans E, leur réunion l'est aussi.
4) Toute suite de points d'une partie relativement compacte A de E a au moins une valeur d'adhérence dans E.

Exemple 2.19

1) La droite réelle $\mathbb{R}$, l'espace $\mathbb{R}^n$, un espace vectoriel normé de dimension finie ou infinie ne sont jamais compacts.
2) Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. A est compacte $\Leftrightarrow$ A fermée et bornée.
3) Soit A une partie finie quelconque d'un espace métrique E, par exemple $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Alors A est nécessairement compacte.
4) $\mathbb{R}$ est localement compact .

5) $E = \mathbb{R}$ et $A = \left]0,\ 1\right[$, A est relativement compact .

Cas particulier d'espaces compacts (**e.v.n en dimension finie**)

Soit $(E,\ \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie.

1) Soit $K \subset E$. K est compact $\Leftrightarrow$ K fermée et bornée.

2) La boule unité fermée d'un e.v.n de dimension finie est compacte pour la norme de cet e.v.n. La réciproque de ce résultat est vraie et fait l'objet du **théorème de Riesz**:

(Si la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé $(E,\ \|.\|)$ est compact alors E est de dimension finie).

3) Comme $(E, \|.\|)$ est homéomorphe à $(\mathbb{k}^n, \|.\|)$ où $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{k} = \mathbb{C}$) , alors tout compact de l'un a pour image un compact de l'autre.

4) i) $E = \mathbb{R}$

$\overline{B}\left(0,\ 1\right) = \{x \in \mathbb{R} / |x| \leq 1\} = \left[-1,\ 1\right]$ est compacte.

ii) $E = \mathbb{C}$

$$\overline{B}\left(\vec{0},\ 1\right) = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1\}$$
$$= \left\{z \in \mathbb{C} / \sqrt{a^2 + b^2} \leq 1\right\} \text{est compacte.}$$

iii) Soit $E,\ F$ espaces vectoriels normés. $X = \mathcal{C}(E,\ F)$ est un espace vectoriel normé de dimension infini .

$\overline{B}\left(0,\ 1\right)$ n'est pas compact .

Remarque générale

Toutes les notions étudiées au chapitre 1 et 2 restent valables, en particulier, aux espaces vectoriels normés, il suffit de remplacer (**espace métrique**) par (**espace vectoriel normé**), et (**espace métrique complet**) par (**espace de Banach**) et (**distance** d) par (**norme** $\|.\|$).

Complément de cours (chapitre 2):

Compacité, précompacité, et compacité relative

Définition 2.20 (**espace précompact**)

Un espace métrique $(E,\ d)$ est dit précompact si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in E \text{ tel que } E = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon) \tag{3.8}$$

Proposition 2.21 (preuve TD)
Un espace métrique précompact est borné.

Proposition 2.22 (preuve TD)
un espace métrique (E, d) compact est précompact.

Proposition 2.23
Soit E un espace métrique et A un sous ensemble de E. L'espace métrique E est précompact si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un recouvrement fini de E par des parties de diamètre inférieur ou égal à ε.

Proposition 2.24
Si (E, d) est précompact, alors pour tout sous ensemble A de E muni de la métrique induite on a: A et $\overline{A}$ sont précompacts.

Proposition 2.25
Soit E un espace métrique précompact. Alors E est séparable. En particulier, tout espace métrique compact est séparable.

Théorème 2.26
Soit E un espace métrique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1) L'espace métrique E est compact.
2) L'espace métrique E est précompact et complet.

Proposition 2.27
Soit E un espace métrique et A une partie de E.

1) Si A est relativement compacte alors A est précompacte.
2) Si E est complet et si A est précompacte alors A est relativement compacte.

Proposition 2.28
Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1) A est précompacte.
2) A est relativement compacte.
3) A est bornée.
4) Toute suite bornée dans A posséde une sous-suite convergente dans $\mathbb{R}^n$.

Corollaire 2.29

Le produit fini d'espaces précompactes est précompacte.

Résumé

Soit $(E,\ d)$ un espace métrique, $A \subset E$ on a:

A rel cpt	$\overset{\text{déf 2. 17}}{\Leftrightarrow}$	$\overline{A}$ compact	$\overset{\text{prop 2. 27}}{\Rightarrow}$	A précompac
E compact	$\overset{\text{Th 2. 26}}{\Leftrightarrow}$	E complet et E précompact		
E complet et A précompact	$\overset{\text{prop 2.27}}{\Rightarrow}$	A rel cpt		
E précompact	$\overset{\text{pro 2. 24}}{\Rightarrow}$	A précompact et $\overline{A}$ précompact		
Compact	$\overset{\text{prop 2. 25}}{\Rightarrow}$	séparable	$\overset{\text{prop 2. 25}}{\Leftarrow}$	précompact
A précompact	$\overset{\text{prop 2. 28}}{\Leftrightarrow}$	A relativement compact	$\overset{\text{prop 2. 28}}{\Leftrightarrow}$	A borné

Chapitre 3: Espace des fonctions continues

Définition 3.1 (**Espace fonctionnel**)

On entend par espace fonctionnel un espace dont les éléments sont des fonctions, c'est-à-dire des applications d'un ensemble E dans un autre F et qu'on note par $A(E,\ F) = \{f : E \to F : f \text{ application}\}$

Remarque 3.2 (**preuve TD**)

Si F possède certaines structures d'espace vectoriel, espace métrique, … alors il est en général possible d'introduire sur $A(E,\ F)$ une structure analogue.

Définition 3.3 (**application bornée**)

Soient E un ensemble non vide et $(F,\ d_F)$ un espace métrique. Une application f de E dans F est dite bornée si le diamètre de son image est fini. On note $B(E,\ F)$ l'ensemble des fonctions bornées de E dans F.

Proposition 3.4 (**preuve TD**)

il est possible de munir $B(E,\ F)$ d'une distance d_∞, définie par

$$d_\infty\ (f,\ g) = \sup_{x \in E}\ d_F\big(f(x),\ g(x)\big) \text{ pour } f,\ g\ \in B(E,\ F). \tag{3.1}$$

Proposition 3.5 (preuve exercice)

Soit E un ensemble non vide. Si $(F,\, d_F)$ est un espace métrique complet, l'espace $(B(E,\, F),\, \delta)$ est complet.

Remarque 3.6

Si $(E,\, d_E)$ est un espace métrique, il est possible de parler d'application continue bornée entre E et un espace métrique $(F,\, d_F)$. On note $C(E,\, F)$ l'ensemble des applications continues et $C_b(E,\, F)$ l'ensemble des applications continues bornées, qu'on les muni encore de la distance uniforme d_∞.

Proposition 3.7 (preuve TD)

Soit $(E,\, d_E)$ un compact et $(F,\, d_F)$ un complet. Alors $C(E,\, F)$ muni de la distance de la convergence uniforme δ est complet.

Définition 3.8 (convergence simple)

On dit qu'une suite de fonction $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, c'est- à-dire d'application d'un ensemble E dans un espace métrique F, converge simplement, pour n tendant vers $+\infty$, vers une fonction limite f, si, pour tout x de E, la suite des points $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de F converge , pour n tendant vers $+\infty$, vers le point $f(x)$ de F.

Cela s'écrit sous la forme logique suivante :

$$(\forall x \in E)\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq n_0) : d\left(f_n(x), f(x)\right) \leq \varepsilon. \tag{3.2}$$

Définition 3.9 (convergence uniforme)

On dit que la suite des fonctions $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f, pour n tendant vers $+\infty$, si l'entier n_0 déterminé dans (3. 2) peut être choisi indépendamment de x, c'est-à-dire seulement en fonction de ε ; autrement dit, si

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall x \in E)(\forall n \geq n_0) : d\left(f_n(x), f(x)\right) \leq \varepsilon. \tag{3.3}$$

Remarque 3.10

Il est bien évident que la convergence uniforme entraine la convergence simple, mais, la réciproque n'est pas vraie ; la convergence uniforme est une propriété beaucoup plus forte que la convergence simple.

Exemple 3.11

Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'applications de $I = [0,\, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = x^n$ alors cette suite converge simplement vers l'application $g : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

Exemple 3.12

1) Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = \frac{nx}{1+|nx|}$ cette suite converge simplement vers la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

2) Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}$ cette suite converge vers $f = 0$.

Quel est le type de cette convergence ?

Remarque 3.13 (facile àvérifier)

Si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur (E, d) vers une fonction f alors f est continue sur E. Ou encore (parcontraposition) une fonction discontinue ne peut pas être limite uniforme de fonctions continues.

Théorème 3.14 (de Dini)

Soit (E, d) un espace métrique compact. Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$ telle que :

1. La suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur E vers une fonction f.
2. f est continue sur E.
3. $\forall x \in E$, la suite $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.

Alors la suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur E vers la fonction f.

Théorème 3.15 (de Dini-Polia)

Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions (non-nécessairement continues) de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

1. La suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur E vers une fonction f.
2. La fonction f est continue sur E.
3. La fonction f_n est croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors la suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur E vers la fonction f.

Exercice: Démontrer les théorèmes 3.14 et 3.15 .

Définition 3.16 (partie équicontinue)

Soient $(E,\, d_E)$ et $(F,\, d_F)$ deux espaces métriques.

- Une partie A de l'espace $C\,(E,\, F)$ est dite équicontinue en un point x de E si

$$\begin{cases} \forall \epsilon > 0\,,\, \exists\, \alpha > 0, \text{ tel que:} \forall\, y \in E \text{ vérifiant } d_E\,(x,\, y) < \alpha \\ \text{l'inégalité } d_F\,(f(x), f(y)) < \varepsilon \text{ soit vérifiée } \forall f \in A. \end{cases} \tag{3.4}$$

On dit que A est équicontinue sur E si A est équicontinue en tout point x de E :

$$\begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0\,, \forall\, x \in E\,,\, \exists\, \alpha > 0, \text{ tel que:} \forall\, y \in E \text{ vérifiant } d_E\,(x,\, y) < \alpha \\ \text{l'inégalité } d_F\,(f(x), f(y)) < \varepsilon \text{ soit vérifiée } \forall f \in A. \end{cases} \tag{3.5}$$

- Une partie A de l'espace $C\,(E,\, F)$ est dite équicontinue uniformément si

$$\begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0\,,\, \exists\, \alpha > 0, \text{ tel que:} \forall\, x\,,\, y \in E \text{ vérifiant } d_E\,(x,\, y) < \alpha \\ \text{l'inégalité } d_F\,(f(x), f(y)) < \varepsilon \text{ soit vérifiée } \forall f \in A. \end{cases} \tag{3.6}$$

Proposition 3.17 (preuve cours)

Soient (E, d_E) , $(F\,,\, d_F)$ deux espaces métriques et, A une partie équicontinue de $C\,(E,\, F)$. Supposons que $(E\,,\, d_E)$ est compact, alors A est uniformément équicontinue.

Exemple 3.18

Soient $(E,\, d_E)$ et $(F,\, d_F)$ deux espaces métriques.

1) Une partie A de $C\,(E,\, F)$ comportant un nombre fini d'éléments est toujours équicontinue.

2) La réunion de deux parties équicontinues de $C\,(E,\, F)$ est une partie équicontinue de $C\,(E,\, F)$.

3) Fixons $k \in \mathbb{R}^{+}$. L'ensemble A des fonctions $f : E \to F$ Lipschitziennes de rapport k est équicontinue de $C\,(E,\, F)$.

Proposition 3.19 (preuve exercice)

On suppose que l'espace E est compact et on considère une partie A équicontinue de $C\,(E,\, F)$. Alors, une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A converge uniformément vers une fonction f de E dans F si et seulement si elle converge simplement vers f.

Proposition 3.20 (preuve TD)

Soit $(E,\, d)$ un espace métrique compact. Alors $\left(C\,(E,\, \mathbb{k}),\, \|.\|_\infty\right)$ est un espace de Banach tel que :

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in E} |f(x)|, \forall f \in C(E, \Bbbk) \tag{3.7}$$

avec $\Bbbk = \mathbb{R}$ $(\text{ou } \Bbbk = \mathbb{C})$.

Remarque 3.21

Notons que (3.7) définit la norme de la topologie de la convergence uniforme, dans le sense où une suite d'éléments de $C(E, \Bbbk)$ converge pour cette norme vers $f \in C(E, \Bbbk)$ si et seulement si elle converge uniformément vers f sur E. Cette norme est appelée norme uniforme.

Théorème 3.22 (d'Arzela-Ascoli)

Soit (E, d_E) un espace métrique compact, (F, d_F) un espace métrique complet. une partie A de $(C(E, F), \delta)$ est relativement compacte si et seulement si:

1) A est équicontinue.

2) Pour tout $x \in E$, l'ensemble $A(x) = \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact.

(voir cours pour la preuve du théorème 3.22 d'Arzela-Ascoli)

Corollaire 3.23 (preuve TD)

Une partie de $C(E, \mathbb{R})$ est relativement compacte dans $(C(E, \mathbb{R}), \|.\|_{\infty})$ si et seulement si elle est bornée et équicontinue.

Corollaire 3.24 (preuve TD)

Soit (E, d) un espace métrique compact. Une partie $A \subset C(E, \mathbb{R}^n)$ est compacte si et seulement si elle est fermée, bornée et équicontinue.

Corollaire 3.25 (preuve exercice)

Si on munit $C^1([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|f\|_{C^1} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$ alors les bornés de $(C^1([0, 1], \mathbb{R}), \|.\|_{C^1})$ sont relativement compacte dans $C([0, 1], \mathbb{R})$.

Chapitre 4: Espace des fonctions linéaires et continues

4.1 Formes linéaires continues

Définition 4.1 (forme linéaire)

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\Bbbk(\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Une forme linéaire u :

$E \to \mathbb{k}$ est une application additive et homogène c'est-à-dire

$$\begin{cases} u(x+y) = u(x) + u(y) \ \forall\, x, y \in E. \\ u(\alpha x) = \alpha u(x), \ \forall\, \alpha \in \mathbb{k}, \ \forall\, x \in E. \end{cases} \tag{4.1}$$

ou bien $u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y)$, $\forall x, y \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}$.

L'ensemble des formes linéaires sur E est noté par $L(E, \mathbb{k})$.

Exemple 4.2

L'application $u : C([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, définie par

$u(f) = \int_0^1 f(t)dt$, $\forall f \in C([0,1], \mathbb{R})$ est une forme linéaire.

Remarque 4.3

Si E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k}$ alors $L(E, \mathbb{k})$ l'est aussi. $L(E, \mathbb{k})$ c'est l'espace **dual algébrique** de E noté aussi par E^* et son dual algébrique (**le bidual algébrique** de E) est noté par $E^{**} = L(L(E, \mathbb{k}), \mathbb{k})$.

Définition 4.4 (forme linéaire bornée)

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et soit u une forme linéaire. On dit que u est bornée si

$$\exists M > 0, \text{ tel que } |u(x)| \le M\|x\|, \ \forall x \in E \tag{4.2}$$

On note par $E' = L_C(E, \mathbb{k})$ l'ensemble des formes linéaires bornées sur E.

Exemple 4.5

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue et soit $E = L^p(dx)$, $1 \le p \le \infty$, muni de la norme

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ si } 1 \le p < +\infty \\ \text{supess}\ \{|f(t)|;\ t \in \Omega\} \text{ si } p = +\infty \end{cases}$$

Si $g \in L^q(dx)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors $u(f) = \int_\Omega f g\, dx$ est une forme linéaire bornée.

Théorème 4.6 (preuve TD)

Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et soit u une forme linéaire sur E. Les quatre énoncés suivants sont équivalents.

1) u est bornée.
2) u est uniformément continue sur E.
3) u est continue à l'origine.

4) u est bornée sur la boule unité fermée $\overline{B}(0, 1)$.

5) $\mathrm{Ker}\ u$ est fermé.

Corollaire 4.7 (preuve TD)

Si E est un espace normé de dimension finie, alors toute forme linéaire sur E est continue, i.e. $E^* = E'$.

Proposition 4.8 (preuve TD)

$(E', \|.\|')$ est un espace de Banach où la norme duale $\|.\|'$ est définie par

$$\|u\|' = \sup_{\|x\| \leq 1} |u(x)| \tag{4.3}$$

E' s'appelle le **duale topologique** de E.

Notation

Lorsque $u \in E'$ et $x \in E$ on notera généralement $\langle u, x\rangle$ au lieu de $u(x)$; on dit que $\langle , \rangle$ est le **produit scalaire dans la dualité** E', E.

Remarque 4.9

1) On peut obtenir la norme $\|u\|'$ par

$$\|u'\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |u(x)| = \sup_{\|x\|=1} |u(x)| = \sup_{x \neq 0} \frac{|u(x)|}{\|x\|} \tag{4.4}$$

2) D'après le théorème 4.6 $\forall x \in E$, on a $|u(x)| \leq \|u\|'\|x\|$, La constante $\|u\|'$ est le plus petit nombre M tel que l'inegalite suivante soit vraie $\forall x \in E$ en d'autre terme

$$\|u'\| = \inf\{M ; |u(x)| \leq M\|x\| \text{ pour tout } x \in E\} \tag{4.5}$$

Exemple 4.10 (espace dual)

1) Si $E = \mathbb{k}^n$ alors E' est isomorphe à E (i.e. il existe une application linéaire bijective).

2) Si $E = H$ un espace de Hilbert, alors d'après le théorème de représentation de Riesz-Fréchet (voir [1] page 81) il existe un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier E et E'.

3) Si (X, M) un espace mesuré et μ une mesure σ –finie et positive. Alors d'après le théorème de Riesz (voir [2] page 294) on a pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $(L^p(d\mu))'$ est isomorphe à $L^q(d\mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

4) D'après le théorème de Riesz (voir [2] corollaire 5.5.4 page 298) l'espace

dual topologique de l^p, $1 \leq p < \infty$ est isomorphe à l'espace l^q où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Théorème 4.11 (de Hahn-Banach)

Soit $p : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant

1) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall x \in E$ et $\forall \lambda > 0$,

2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E$.

(i.e. p une application convexe). Ici E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.

Soit d'autre part, $S \subset E$ un sous-espace vectoriel et soit $u : S \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que

3) $u(x) \leq p(x) \quad \forall x \in S$.

Alors il existe une forme linéaire $\tilde{u}$ définie sur E qui prolonge u, i.e.

$u(x) = \tilde{u}(x) \quad \forall x \in S$

et telle que

4) $\tilde{u}(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E$.

Aide. La démonstration du théorème 4.11 fait appel au lemme de Zorn qui n'est pas étudié dans ce parcoure du L.M.D (voir [1 page 1] par exemple pour une démonstration de ce théorème).

Corollaire 4.12 (preuve cours)

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{R}$ et S un sous-espace vectoriel de E. Soit $u : S \to \mathbb{R}$ une application linéaire et continue de norme

$$\|u\|_{S'} = \sup_{\substack{x \in S \\ \|x\| \leq 1}} u(x)$$

Alors il existe $\tilde{u} \in E'$ qui prolonge u et tel que

$$\|\tilde{u}\|_{E'} = \|u\|_{S'} \tag{4.6}$$

Corollaire 4.13 (preuve cours)

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{R}$. Alors pour tout $x_0 \in E$ il existe $u_0 \in E'$ tel que :

$$\|u_0\|' = \|x_0\| \text{ et } \langle u_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2. \tag{4.7}$$

Corollaire 4.14 (preuve cours)

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in E$ il existe $u \in E'$ tel que :

$$\|u\|' = 1 \text{ et } u(x) = \|x\|. \tag{4.8}$$

Corollaire 4.15 (preuve TD)

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in E$ on a

$$\|x\| = \underset{\substack{u \in E' \\ \|u\|' \leq 1}}{\text{Sup}} \left|\langle u, x\rangle\right| = \underset{\substack{u \in E' \\ \|u\|' \leq 1}}{\text{Max}} \left|\langle u, x\rangle\right|. \tag{4.9}$$

où $u \in E'$.

Exercice (Preuve TD)

Montrer que l'application $u : C\left(\left[a, b\right], \mathbb{R}\right) \to \mathbb{R}$, définie par $u(f) = \int_a^b f(t)dt,\ \forall f \in C\left(\left[a, b\right], \mathbb{R}\right)$ est une forme linéaire bornée et calculer la norme $\|u\|'$.

Définition 4.16 (bidual topologique)

Soit E un espace de Banach sur le corps $\mathbb{k}$ $(\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, soit $(E', \|.\|')$ son dual topologique. Le **bidual topologique** E'' est le dual de E', muni de la norme.

$$\|\xi\|'' = \underset{\substack{u \in E' \\ \|u\|' \leq 1}}{\text{Sup}} \left|\langle \xi, u\rangle\right| \tag{4.10}$$

$(E'', \|.\|'')$ est un espace de Banach et on a

Remarque 4.17 (relation entre E, E', E'')

On a toujours une injection canonique $J : E \to E''$ définie comme suit :

Soit $x \in E$ fixé, lapplication $\begin{array}{rcl} \langle ., x\rangle : & E' \to & \mathbb{k} \\ & u \mapsto & \langle u, x\rangle \end{array}$ constitue une forme linéaire continue sur E' i.e. un élément de E'' noté Jx. On a donc,

$$(Jx)(u) = \langle Jx, u\rangle_{E'', E'} = \langle u, x\rangle_{E', E} \quad \forall x \in E,\ \forall u \in E' \tag{4.11}$$

Il est clair que J est linéaire et que J est une isométrie i.e. $\|Jx\|'' = \|x\|,\ \forall x \in E$:

$$\|Jx\|'' = \underset{\substack{u \in E' \\ \|u\|' \leq 1}}{\text{Sup}} \left|\langle Jx, u\rangle\right| = \underset{\substack{u \in E' \\ \|u\|' \leq 1}}{\text{Sup}} \left|\langle u, x\rangle\right| = \|x\| \tag{4.12}$$

donc J est une isométrie et donc injective. A l'aide de J on peut toujours identifier E à un sous-espace de E''. En général J n'est pas surjective. Lorsque J est surjective on dit que E est **réflexif** et on a

Définition 4.18 (espace réflexif)

Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E'' (voir remarque 4.18) . On dit que E est **réflexif** si $J(E) = E''$. **Lorsque E est réflexif on identifie implicitement E et E''** (à l'aide de l'isomorphisme J)

Proposition 4.19 (preuve exercice)

Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si E' est réflexif.

Exemple 4.20 (espace réflexif)

On a d'après [1] les résultats suivants:

1) L^p est réflexif pour $1 < p < \infty$.
2) L'espace L^1 n'est pas réflexif. Daprès la proposition 4.19 L^∞ n'est pas réflexif.

Définition 4.21 (convergence faible)

Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement dans E vers x et on écrit $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ si

$$\lim_{n\to+\infty} \langle u, x_n\rangle = \langle u, x\rangle \ \forall\, u \in E' \Longleftrightarrow \langle u, x_n - x\rangle \underset{n\to+\infty}{\to} 0, \ \forall\, u \in E' \tag{4.13}$$

proposition 4.22 (preuve TD)

Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On a

1) la limite faible si elle existe est unique.
2) Si $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ fortement $\left(i.e.\ \|x_n - x\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0\right)$, alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ faiblement
3) Si $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ faiblement et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} u$ fortement dans $E'\left(i.e.\ \|u_n - u\|' \underset{n\to+\infty}{\to} 0\right)$, alors $\langle u_n, x_n\rangle \underset{n\to+\infty}{\to} \langle u, x\rangle$.

4.2 Opérateurs linéaires continus

Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{k}(\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Considérons l'application
$$\begin{array}{rccl} T & E & \to & F \\ & x & \mapsto & T(x) = Tx \end{array}$$

Définition 4.23 (opérateur linéaire)

Un opérateur linéaire $T: E \to F$ est une application additive et homogène c'est-à-dire

$$\begin{cases} T(x+y) = T(x) + T(y) \ \forall\, x, y \in E. \\ T(\alpha x) = \alpha T(x), \ \forall\, \alpha \in \mathbb{k}, \ \forall\, x \in E. \end{cases} \tag{4.14}$$

ou bien $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$, $\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}$.

Exemple 4.24 (opérateur linéaire)

1) Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{k}$, $\dim E = p$ et $\dim F = q$. Soient $\{e_1, \ldots, e_p\}$ une base pour E et $\{e_1^*, \ldots, e_q^*\}$ une base pour F. Tout opérateur linéaire $T : E \to F$ est déterminé, dans les bases choisies, de façon unique par une matrice de type $p \times q$, $A = (\alpha_{ij})$ où $\alpha_{ij} \in \mathbb{k}$, $i = 1, \ldots, p; j = 1, \ldots, q$.

$\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{p} \xi_i e_i \Rightarrow T(x) = \sum_{i=1}^{p} \xi_i T(e_i)$. Alors pour connaître l'opérateur linéaire T, il suffit de savoir les images $T(e_i) \in F$, $T(e_i) = \sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} e_j^*$, $i = 1, \ldots, p$.

2) Considérons l'espace vectoriel $E = C([a, b], \mathbb{k})$ et soit $k : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{k}$ continue. L'application $T : E \to E$ donnée par $(Tf)(t) = \int_a^b k(t, x) f(x) dx$, $t \in [a, b]$, $f \in E$ est un opérateur linéaire.

3) L'application $C_b^\infty(\mathbb{R}) \to C_b^\infty(\mathbb{R})$ donnée par $(Tf)(t) = \frac{df(t)}{dt}$ est un opérateur linéaire. $C_b^\infty(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble de fonctions infiniment dérivables et bornées sur $\mathbb{R}$.

4) Soient H un espace de Hilbert et $H_1 \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé de H. L'opérateur de la projection orthogonale de H sur H_1 est un opérateur linéaire.

Définition 4.25 (opérateur linéaire continu)

L'opérateur linéaire T est continu en $x_0 \in E$ si

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E : \|x - x_0\|_E < \eta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\|_F < \varepsilon, \\ \text{en d'autre terme} \\ \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E \text{ tel que } x_n \overset{\|.\|_E}{\to} x_0 \Rightarrow Tx_n \overset{\|.\|_F}{\to} Tx_0 \end{cases} \tag{4.15}$$

Définition 4.26 (opérateur borné)

L'opérateur linéaire $E \to F$ est borné si

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \|Tx\|_F \le M \|x\|_E,\ \forall x \in E. \tag{4.16}$$

On vérifie aisément (comme pour les formes linéaires continues) que (4.15) et (4.16) sont équivalentes et on a

Théorème 4.27 (voir théorème 4.6)

Soit $T : E \to F$ un opérateur linéaire. Les énoncés suivants sont équivalents.

1) T est continu sur E.

2) T est uniformément continu sur E.

3) T est continu à l'origine.

4) Si $A \subset E$ est un ensemble borné dans E, alors $T(A) \subset F$ est un ensemble borné dans F.

Corollaire 4.28 (voir corollaire 4.7)

Tout opérateur linéaire sur un espace normé de dimension finie est continu.

Exemple 4.29

L'opérateur donné dans l'exemple 4.24 $(Tf)(t) = \frac{df(t)}{dt}$ n'est pas borné.

Remarque 4.30

1) L'espace des opérateurs linéaires continus noté $L_C(E, F)$ est un espace vectoriel normé où

$$|||T||| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F \tag{4.17}$$

2) Si F est un espace de Banach alors $L_C(E, F)$ l'est aussi.

3) $|||T||| = \inf \{M ; \|T(x)\|_F \leq M \|x\|_E \text{ pour tout } x \in E\}$

4) $|||T||| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|T(x)\|_F = (\sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E})$.

Théorème 4.31 (de Banach-Steinhaus)

Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach, et $T_i : E \to F$, $i \in I$ une famille d'opérateurs linéaires continus $(T_i \in L_C(E,F))$ telles que:

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\|_F < +\infty, \forall x \in E. \tag{4.18}$$

Alors,

$$\sup_{i \in I} |||T_i||| < +\infty. \tag{4.19}$$

Autrement dit $\exists c > 0, \|T_i x\|_F \leq c\|x\|_E, \forall x \in E, \forall i \in I.$

Soit encore $\exists c > 0, \|T_i x\|_F \leq c, \forall x \in \overline{B}(0,1), \forall i \in I.$

(voir cours pour la preuve du théorème 4.31 de Banach-Steinhaus)

Corollaire 4.32

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espace de Banach, et $T_n : E \to F$, $n \geq 1$ une suite d'opérateurs linéaires continus tel que pour tout $x \in E$, la suite $\{T_n x\}_{n \geq 1}$ converge dans F vers une limite notée Tx, c'est-à-dire $\lim_{n \to +\infty} T_n x = Tx, \forall x \in E$. Alors,

$$\sup_{n \geq 1} |||T_n||| < +\infty, \text{ et } T \in L_C(E, F). \tag{4.20}$$

Preuve

Comme $\{T_n x\}_{n \geq 1}$ est convergente alors $\{T_n x\}_{n \geq 1}$ est bornée pour chaque $x \in E$. D'après le théorème 4.31,

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \|T_n x\|_F \leq C \|x\|_E \; \forall n \geq 1, \; \forall x \in E \tag{4.21}$$

en d'autre terme $\sup_{n \geq 1} |||T_n||| < +\infty$. En passant à la limite pour $n \to +\infty$ dans (4.21) on retrouve (4.20).

On rappelle la définition suivante :

Définition 4.33 (application ouverte)

Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques. On dit que $f : E \to F$ est une application ouverte si l'image par f de tout ouvert de E est un ouvert de F.

Une conséquence du théorème de Baire est le théorème suivant :

Théorème 4.34 (de l'application ouverte)

Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ un opérateur linéaire, continu et surjectif. Alors $\exists c > 0$ tel que:

$$B_F(0, c) \subset T\left(B_E(0, 1)\right) \tag{4.22}$$

Preuve

La démonstration de ce théorème est très longue (voir par exemple [1]) et ce fait en deux étapes :

1ère étape :On montre (grâce au théorème de Baire) qu'il existe $c > 0$ tel que:

$$B_F(0, 2c) \subset \overline{T\left(B_E(0, 1)\right)} \tag{4.23}$$

2ème étape: On montre que si T est un opérateur linéaire et continu de E dans F qui vérifie (4.23). Alors T vérifie nécessairement (4.22).

Par conséquent T est une application ouverte d'après la remarque suivante:

Remarque 4.35

La propriété (4.22) entraîne que T transforme tout ouvert de E en un ouvert de F (d'où le nom de ce théorème):

Preuve

Soit U un ouvert de E et $y \in T(U)$, alors $\exists\, x \in U$ tel que $y = T(x)$. Comme U est ouvert $\exists\, r > 0$: $B_E(x,r) \subset U$ alors $x + B_E(0, r) \subset U$. On a alors $y + T(B_E(0, r)) \subset T(U)$. On a

$$B_F(y, rc) = y + B_F(0, rc) \overset{\text{d'après (4.22)}}{\subset} y + T(B_E(0, r)) \subset T(U).$$

Le théorème suivant, très utile en pratique, est une conséquence immédiate du théorème de l'application ouverte :

Théorème 4.36 (de l'isomorphisme de Banach)

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach et $T : E \to F$ un opérateur linéaire continu et bijectif alors T^{-1} est un opérateur linéaire continu.

Preuve

T^{-1} est linéaire comme réciproque d'une application linéaire. Soit U un ouvert de E. Alors, $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ est un ouvert de F par le théorème 4.34. Donc T^{-1} est continue.

Voici un résultat très utile pour obtenir des estimations difficiles mettant en jeu deux normes sur un même espace. Il suffira souvent en pratique de prouver une inégalité relativement simple pour obtenir une inégalité dans l'autre sens, a priori plus difficile.

Corollaire 4.37

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$. On suppose que E muni de chacune de ces deux normes est un espace de Banach. On suppose de plus qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que: $\|x\|_2 \leq \alpha \|x\|_1 \ \forall x \in E$. Alors les deux normes sont équivalentes.

Preuve

Soit
$$\begin{aligned} T : \quad (E, \|.\|_1) &\to (E, \|.\|_2) \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$
alors T est une bijection linéaire continue car par hypothèse $\exists \alpha > 0 \ \|x\|_2 \leq \alpha \|x\|_1 \ \forall x \in E$. Par conséquent T^{-1} est aussi continue par le théorème 4.36, donc $\exists \beta > 0 \ \|x\|_1 \leq \beta \|x\|_2 \ \forall x \in E$.

Définition 4.38 (opérateur inversible)

Soit E et F deux espaces vectoriels normés et $T : E \to F$ un opérateur linéaire et continu, on dit que T est inversible si T bijectif et T^{-1} continu.

Corollaire 4.39 (preuve exercice)

Si E et F deux espaces de Banach, alors T est inversible si et seulement si T est bijectif.

On rappelle la définition suivante :

Définition 4.40 (graphe d'une application)

Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Le graphe f noté $G(f)$ est l'ensemble,

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in E \times F : x \in E\} = \{(x, y) \in E \times F : x \in E \text{ et } y = f(x)\}.$$

Théorème 4.41

Soit f une application continue d'un espace métrique (E, d_E) dans un espace métrique (F, d_F), alors le graphe de f est fermé.

Preuve

Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $G(f)$ qui converge vers $(x, y) \in E \times F$ et on veut montrer que $(x, y) \in G(f)$, c'est-à-dire $y = f(x)$. Comme $(x_n, y_n) \underset{n \to \infty}{\to} (x, y)$, alors $x_n \to x$ et $y_n \to y$. Mais par hypothèse f est continue alors $f(x_n) \underset{n \to \infty}{\to} f(x)$. Donc $y = f(x)$.

Par conséquent $(x, y) \in G(f)$ ce qui montre que $G(f)$ est fermé.

Théorème 4.42 (du graphe fermé)

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach et soit $T : E \to F$ un opérateur linéaire. Si $G(T)$ est fermé dans $E \times F$, alors T est continu.

Preuve

On suppose que $G(T)$ fermé. On définit l'application

$$\begin{aligned} \|.\|_\Gamma : \quad E &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \|x\|_\Gamma = \|x\|_E + \|f(x)\|_F \end{aligned}$$

et on vérifie aisément qu'elle constitue une deuxième norme sur E, appeler **la norme du graphe fermé**. On montre maintenant que $(E, \|.\|_\Gamma)$ est un espace de Banach.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(E, \|.\|_\Gamma)$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N},$$

$$\big((p \geq n_0)\, et (q \geq n_0)\big) \Rightarrow (\|x_p - x_q\|_E + \|T(x_p) - T(x_q)\|_F \leq \varepsilon),$$

donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\left(E, \|.\|_E\right)$ qui est de Banach, ainsi $x_n \overset{\|.\|_E}{\rightarrow} x \in E$. De même $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\left(F, \|.\|_F\right)$ qui est de Banach, par conséquent $Tx_n \overset{\|.\|_F}{\rightarrow} y \in F$.

La suite $\left\{\left(x_n, T(x_n)\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $G(T)$ qui est fermé (par hypothése) et converge vers (x, y), alors: $(x, y) \in G(T)$ c'est-à-dire $y = T(x)$. Donc $\|x_n - x\|_\Gamma = \|x_n - x\|_E + \|T(x_n) - T(x)\|_F \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$, alors $\left(E, \|.\|_\Gamma\right)$ est un espace de Banach.

Comme $\|x\|_E \leq \|x\|_\Gamma$, $\forall x \in E$, et d'après le théorème 4.36 de l'isomorphisme de Banach,

$$\exists \alpha > 0, \|x\|_\Gamma \leq \alpha \|x\|_E, \forall x \in E.$$

D'autre part $\|T(x)\|_F \leq \|x\|_\Gamma$, alors $\|T(x)\|_F \leq \alpha\|x\|_E$.

Par conséquent, T est continu.

Remarque 4.43

Bien entendu la réciproque est vraie puisque (d'après le théorème 4.41) toute application continue (linéaire ou non linéaire) a un graphe fermé.

Proposition 4.44 (preuve TD)

Soient $\left(E, \|.\|_E\right)$ et $\left(F, \|.\|_F\right)$ deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire continu.

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) T est injectif et à image fermée.

2) il existe une constante $c > 0$, tel que $\|Tx\|_F \geq c\|x\|_E$, $\forall x \in E$.

Bibliographie

[1] **H. BREZIS**, Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications, Masson,1983.

[2] **W. Hengartner**, **M. Lambert**, **C. Reischer**. Introduction à l'analyse fonctionnelle, les presses de l'université du Québec, 1981.

[3] **L. Schwartz**. Topologie générale et analyse fonctionnelle. Edi. Hermann, 1993.